数理解析研究所講究録
201巻 1974年 166-193

公理的ポテンシャル論における Duality と Cohomology

早大理工　郡　敏昭

$(X, \mathcal{H})$ を non-compact な Brelot の調和空間とする。X の一点コンパクト化を $Y = X \cup \{a\}$ とし Y 上の sheaf $\mathcal{O}$ が $\mathcal{O}|X = \mathcal{H}$ となるように与えられているとしよう。このとき1次コホモロジー群 $H^1(Y, \mathcal{O})$ を調べたい。これは次の問題の公理的とりあつかいである。2階楕円型方程式の斉次解のつくる層を $\mathcal{H}$ とし，それが境界条件を与えられたときの層を $\mathcal{O}$ とするとき $H^1(Y, \mathcal{O})$ を調べること。われわれはさらに Duality を調べる。すなわち adjoint な層 $\mathcal{H}^*$ についてその dual が X に台をもつ1次コホモロジー群 $H^1_c(X, \mathcal{H})$ であることを見る。そして $H^1_c(X, \mathcal{H})$ の余次元が1の部分空間と $\Gamma(Y, \mathcal{O}^*)$ とが dual になっていることを見る（ただし最後の主張は $\Gamma(Y, \mathcal{O}) \neq 0$ のとき）。次の alternative が成り立つ。

(i) $\mathcal{O}_Y = \{0\} \Rightarrow H^1(Y, \mathcal{O}) = \{0\}$, $\Gamma(Y, \mathcal{O}^*) = \{0\}$,

　　このとき ∃ global な基本解＝グリーン函数。

(ii) $\mathcal{O}_Y = R^1 \Rightarrow \dim H^1(Y, \mathcal{O}) = \dim H^0(Y, \mathcal{O}^*) = 1$ 。

われわれはさらに Y の covering $V \ni \{a\}$, $U \subset X$, $U \cup V = Y$ について Cousin の問題（層 $\mathcal{O}$ の）を解く.

§1. lateral condition の層 $\mathcal{O}$.

$(X, \mathcal{H})$ を Brelot の調和空間とする. $\mathcal{O}$ を a sheaf on Y of linear spaces で $\mathcal{O}_x = \mathcal{H}_x$, $x \in X$, なるものとする. Y の domain G が $\mathcal{O}$-regular（または単に regular）であるとは次のことを言う。G の（Y での）境界を ∂G と書くとき, ∂G 上の任意の連続函数 f は $\overline{G}$ 上へ一意連続に拡張され, その G への制限 $H^G f$ は $\mathcal{O}_G = \Gamma(G, \mathcal{O})$ に属する. そして $f \geq 0$ なら $H^G f \geq 0$。 $f \to H^G f(x)$ は $C(\partial G)$ 上の正の1次形式だから ∂G 上のラドン測度 ρ_x^G により $H^G f(x) = \int f(y)\, d\rho_x^G(y)$ と表わされる。（ ${}^{\mathcal{O}}H^G$ と書くべきだが $\mathcal{O}$ は略す）

仮定 1： $\mathcal{O}$-regular set からなる Y の topology の base がある.

この仮定のもとに次の Harnack の性質が示される：

$h_n \in \mathcal{O}_G$, 増加列 $\Rightarrow$ $\sup h_n \equiv +\infty$ かでなければ

注： X の領域 D で $D \cup \{a\} = V$ が $\{a\}$ の近傍となっているようなものに対して, $\tilde{\mathcal{H}}_D = \mathcal{O}_V$ とおいて $\mathcal{H}_D$ の部分空間を定義すれば $(X, \mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}})$ は full harmonic 構造を与える。

$\sup h_n \in \mathcal{O}_G$ 。

したがって $(\mathcal{O}_y, y \in Y)$ は,（一点 $\{a\}$ において）連続函数の germ のつくる層になっているという点をのぞけば ふたたび Brelot の公理をみたす調和空間になっており それにもとずく potential 論は同様に展開される。実際 前頁の注のように fullharmonic 構造と考えれば それは前田［　］郡［　］でなされた。われわれは R.M. Herve により展開され B. Walsh により local な性質のみに基づくよう修正された potential 論（の並行）を採ろう。

Definitions : 開集合 G に対し $X \cap G$ 上で定義された函数 s は次のとき G 上で $(\mathcal{O}-)$ superharmonic という: s は下半連続, $> -\infty$, で, 任意の $\mathcal{O}$-regular set $\omega \subset \overline{\omega} \subset G$ と $f \in C(\partial\omega)$ に対し, "$s \geq f$ on $\partial\omega \Rightarrow s \geq H^{\omega}f$ on $X \cap \omega$" をみたし さらに $X \cap G$ の任意の connected component 上で $\not\equiv +\infty$。

G 上の非負な $\mathcal{O}$-superharmonic 函数 p は "$u + p \geq 0$ をみたす G 上の $\mathcal{O}$-superharmonic 函数 u は必ず $u \geq 0$" をみたすとき potential (type) であると言う。

G 上の potential p に対し "$p \in \mathcal{O}_{G \cap X \setminus A} = \mathcal{H}_{G \cap X \setminus A}$ をみたす最小閉集合 A" を p の support, (carrier), と言う。

Y の領域 V に対し V 上に non-zero potential が存在するとき V は small であるという。

仮定2. 定数 1 は Y 上で superharmonic

仮定3 X は small set であり, $\{a\}$ の近傍 V_0 で small なものがある.

仮定4 X(または V_0)上の potential で X 内の一点を support とするものは互に比例する.

以上の仮定のもとに Herve による potential 論は $(Y, \mathcal{O})$ に対しても展開できる。たとえば次のことがわかる。

V を small set(とくに X または V_0)とする. このとき V の任意の点 y に対し $\{y\}$ を support とする V 上の potential ${}^V p_y$ で, $(x, y) \to {}^V p_y(x)$ は $V \times V$ 上で下半連続, 対角線 $x = y$ をのぞいたところでは連続となるものが存在する。この ${}^V p_y(x)$ を kernel on V と言う.

開集合 U と U 上の非負 superharmonic 函数 s に対し, その最大な $\mathcal{O}$-harmonic minorant を $M^U s$ と書こう。すなわち

$$h = M^U s \Leftrightarrow \circ\, h \in \mathcal{O}_U, \quad h \leqq s \text{ on } X \cap U,$$

$$\circ \text{ if } \exists h' \in \mathcal{O}_U,\ h' \leqq s \text{ on } X \cap U, \text{ then } h' \leqq h.$$

定理(B. Walsh) $(V_i)_{i \in I}$ を small な領域による Y の covering とする. このとき V_i 上の kernel $p^i_y(\cdot)$ を, 各々の $V_i \cap V_j \neq \phi$ なる (i, j) および開集合 $U \subset V_i \cap V_j$ に対して, 関係

$$p^i_y(x) - M[p^i_y | U](x) = p^j_y(x) - M[p^j_y | U](x)$$

が $(x, y)\in U\times U$ について成り立つように選ぶことができる。

つぎにわれわれは adjoint な sheaf を導こう。

領域 V と V 上の非負 superharmonic 関数 s, V の部分集合 A に対し

$${}^{V}R^{A}s(x)=\inf\{u(x);\ u \text{ は } V \text{ 上の非負 superhar. 函数で } u\geq s \text{ on } A\},\quad x\in X\cap V,$$

とおく。これの下半連続化 $\widehat{{}^{V}R^{A}s}$ は V 上で superharmonic で $\mathring{A}$ 上で s に等しい。これは s の A 上への掃散である。

開集合 ω が, $\overline{\omega}\subset X$ で, X 上の任意の potential p で $X\setminus\omega$ にその support をもつものに対し ${}^{X}R^{X-\omega}p=p$ をみたすとき, または, $\{a\}\in\omega\subset\overline{\omega}\subset V_0$ で, V_0 上の任意の potential p で $V_0\setminus\omega$ にその support をもつものに対し ${}^{V_0}R^{V_0-\omega}p=p$ on $V_0\cap X$, をみたすとき, に ω を c.d. set (complétement determinant) と言う。

仮定5　c.d. set よりなる Y の位相の base がある。

さて V を small set とするとき, $y\in\omega\subset\overline{\omega}\subset V$ なる開集合 ω に対し ${}^{V}R^{V-\omega}p_y$ は V 上の potential でその support は $\partial\omega$ に含まれる(但し ${}^{V}p_y$ を p_y と書いた)。したがってある $\partial\omega$ 上の measure $\sigma_y^{\omega}(dz)$ により

$${}^{V}R^{V-\omega}p_y(x)=\int {}^{V}p_z(x)\,d\sigma_y^{\omega}(z),\quad x\in V\cap X,$$

と表現される。(Herve [ ] Chap III, p.p. [ ] § 5). σ_y^ω は V に依存せずきまることが

" V small set, $U \subset V$, $\omega \subset \overline{\omega} \subset U$, s を ω の compact set に support をもつ V 上の potential とするとき

$$ {}^V R^{V-\omega} s = {}^U R^{U-\omega} s \quad \text{on } U $$

が成り立つ" および

" ${}^U p_y(x) = {}^V p_y(x) - M^U[{}^V p_y](x)$, $(x, y) \in U \times U$ "

および potential の kernel による表現の一意性からわかる。(Walsh [ ] p.p 385 — 388)

Definition: G を Y の開集合とする。

$h^* \in \mathcal{O}_G^* \iff$ ◦ h^* は $X \cap G$ 上の連続函数

◦ $\forall \omega \subset \overline{\omega} \subset G$ なる c.d. set と $\forall y \in \omega \cap X$ に対し

$$ h^*(y) = \int h^*(z)\, d\sigma_y^\omega(z) \quad 。 $$

($\mathcal{O}_G^*$; G) が (complete) presheaf on Y of linear spaces をつくること, および $\mathcal{O}^*$-regular set = c.d. set になること, $\mathcal{O}_G^*$ について Harnack の性質が成り立つことがたしかめられる。 これに associate した sheaf を $\mathcal{O}^*$ と書く。

§2 層 $\mathcal{O}$ の fine resolution; cohomology group.

$\mathcal{S}_V$ を $V\cap X$ 上で連続な V 上の superharmonic 函数全体のつくる convex cone, $\mathcal{P}_V$ を $V\cap X$ 上で連続な V 上の potential 全体のつくる convex cone とする。 $\mathcal{Q}_V = \mathcal{P}_V - \mathcal{P}_V$, $\mathcal{R}_V = \mathcal{P}_V + \mathcal{O}_V$ とおく。 $\mathcal{R}_V, \mathcal{Q}_V$ は R-module であり $\mathcal{R}_V$ は $\mathcal{O}_V$ と $\mathcal{P}_V$ の direct sum になっている。 $i_V: \mathcal{O}_V \to \mathcal{R}_V$ を自然な injection, $\pi_V: \mathcal{R}_V \to \mathcal{Q}_V$ を自然な projection とすると $0 \to \mathcal{O}_V \xrightarrow[i_V]{} \mathcal{R}_V \xrightarrow[\pi_V]{} \mathcal{Q}_V \to 0$, exact.

r^V_U を $\mathcal{R}_U \to \mathcal{R}_V$ ($U \supset V$) の restriction とすると $\{\mathcal{R}_V, r^U_V\}$ は R-module の準層をつくる。 $j_V: \mathcal{Q}_V \to \mathcal{R}_V$ を自然な injection とするなら $\pi_V \cdot j_V = Id_{\mathcal{Q}_V}$ であり $U \supset V$ に対し $\rho^V_U = \pi_V\, r^V_U\, j_U$ なる写像 $\mathcal{Q}_U \to \mathcal{Q}_V$ は

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_U & \xrightarrow[\pi_U]{} & \mathcal{Q}_U \\ {\scriptstyle r^V_U}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \rho^V_U} \\ \mathcal{R}_V & \xrightarrow[\pi_V]{} & \mathcal{Q}_V \end{array}$$

を可換にするただ一つの homomorphism になる。 $\{\mathcal{Q}_U, \rho^V_U\}$ は R-module の準層をつくる。 $\mathcal{R}_V, \mathcal{Q}_V$ に associate した層を $\mathcal{R}, \mathcal{Q}$ と書き i_U, π_U より induce される homomorphism を i, π と書く。 $r_U: \mathcal{R}_U \to \Gamma(U, \mathcal{R})$, $\rho_U: \mathcal{Q}_U \to \Gamma(U, \mathcal{Q})$ は injective になっている。

定理（Walsh）$\mathcal{R}$, $\mathcal{Q}$ は fine sheaf になる。

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow[i]{} \mathcal{R} \xrightarrow[\pi]{} \mathcal{Q} \to 0 \quad (\text{exact}).$$

したがって de Rahm の定理から

$$H^q_\Phi(Y, \mathcal{O}) = 0 \qquad q \geqq 2$$
$$H^1_\Phi(Y, \mathcal{O}) = \frac{\Gamma_\Phi(Y, \mathcal{Q})}{\pi\,\Gamma_\Phi(X, \mathcal{R})}$$

が成り立つ。 ここにΦは任意の family of supports.

$H^1_c(Y, \mathcal{O}) = H^1_X(Y, \mathcal{O})$ がわれわれにとって重要である。ただし添字 c は X に support が含まれていることを示している。 あきらかに

$$H^1_X(Y, \mathcal{O}) = H^1_c(X, \mathcal{O}|X) = H^1_c(X, \mathcal{H})$$

すなわち これらは（lateral condition つきの）層 $\mathcal{O}$ には依存せず 最初の層 $\mathcal{H}$ にのみ依存する。

層の一般論より次の exact 列を得る.

$$0 \to \Gamma_c(Y, \mathcal{O}) \to \Gamma(Y, \mathcal{O}) \to \mathcal{O}_a \to H^1_c(X, \mathcal{H}) \to H^1(Y, \mathcal{O})$$
$$\to H^1(\{a\}, \mathcal{O}) \to 0 \cdots$$

$$0 \to \Gamma_a(Y, \mathcal{O}) \to \Gamma(Y, \mathcal{O}) \to \Gamma(X, \mathcal{O}) \to H^1_a(Y, \mathcal{O}) \to$$
$$\to H^1(Y, \mathcal{O}) \to H^1(X, \mathcal{O}) \to 0$$

一方 $\Gamma_c(Y, \mathcal{O}) = \Gamma_a(Y, \mathcal{O}) = 0$ $\quad H^1(a, \mathcal{O}) = \dfrac{\mathcal{Q}_a}{\pi \mathcal{R}_a} = 0$

だから結局

$$0 \to \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_a \to H^1_c(X, \mathcal{H}) \to H^1(Y, \mathcal{O}) \to 0$$

および

$$0 \to \mathcal{O}_Y \to \mathcal{H}_X \to H^1_a(Y, \mathcal{O}) \to H^1(Y, \mathcal{O}) \to$$
$$\to H^1(X, \mathcal{H}) \to 0$$

となる。同様の exact 列が adjoint sheaf $\mathcal{O}^*$ についても得られる。

Lemma 2.1. U を small set, $V \subset U$ open とする。$s \in \mathcal{S}_V$ および $V' \subset \overline{V'} \subset V$ に対し $p = s + p'$ on V', $p' \in \mathcal{O}_{V'}$, が成り立つような $p, p' \in \mathcal{P}_U$ が存在する。

Lemma 2.2. U small set, $V \subset U$ open. $s \in \mathcal{S}_V$ の support が V の compact set B である、すなわち s の potential part の support が B であるとしよう。このとき $u - s \in \mathcal{O}_V$ をみたし B を support とする $u \in \mathcal{P}_U$ が唯一つ存在する。

以上の Lemma は $U \subset X$ の場合は Hervé [ ] Theorems 13.1, 13.2 である。他の場合も同様に証明される。

定理 2.3. $1 \notin \mathcal{O}_Y$ なら $\mathcal{O}_Y = \{0\}$, $H^1(Y, \mathcal{O}) = \{0\}$ である。

この定理を証明するため $\mathcal{Q}$ が有界可測函数のつくる層 $\mathcal{B}$ について $\mathcal{B}$-module になることを注意しよう。まず

$\mathcal{P}_U = \{0\}$ のときはあきらかである。U が small のとき $\mathcal{P}_U \ni p$ は $p = \int p_y(\cdot)\,d\mu(y) + {}^U B\,p$ と書ける。但し $p_y(x)$ は U 上の kernel であり ${}^U B$ は $U \subset X$ なら 0 作用素，$U \ni \{a\}$ のときは $\mathcal{P}_U = \mathcal{P}_U^i \oplus \mathcal{P}_U^b$；$\mathcal{P}_U^b = \mathcal{P}_U \cap \mathcal{O}_{X \cap U} = \{ p \in \mathcal{P}_U$，$p$ の support は $a\}$，$\mathcal{P}_U^i$ は $\mathcal{P}_U$ の自然な lattice order で $\mathcal{P}_U^b$ に etrangér な部分，なる分解における $\mathcal{P}_U^b$ − part を対応させる作用素とする。前田［　］。
$f \in \mathcal{B}_U$ に対し $f \circ p = \int p_y(\cdot) f(y)\,d\mu(y) + f(a)\,{}^U B p$ として積を定義する。$V \subset U$ に対し

$$\begin{aligned}\rho_U^V(f \circ p)(x) &= \int \left(p_y(x) - M[p_y \mid V](x) \right) 1_V(y) f(y)\,d\mu(y) \\ &\quad + f(a)\left({}^U B p - M[{}^U B p \mid V]\right)(x), \quad x \in V \\ &= \int g_y(x)\,(r_U^V f)(y)\,d[1_V \mu](y) + f(a)\,{}^V B p(x), \\ &= (r_U^V f) \circ (\rho_U^V p)(x),\end{aligned}$$

但し $g_y(x)$ は V 上の kernel，
したがって $\{\mathcal{B}_U, \mathcal{Q}_U, \{r_U^V, \rho_U^V\}\}$ は presheaf. になり $\mathcal{Q}$ は $\mathcal{B}$-module になる。

定理の証明.

◉ $\mathcal{S}_Y \ni 1$ の $\mathcal{O}_Y$, $\mathcal{P}_Y$ part への分解を $1 = h + p$ とする。$1 \notin \mathcal{O}_Y$ より $p \not\equiv 0$ したがって $p > 0$ すなわち Y は small になる。このときは $\mathcal{O}_Y = \{0\}$，$\mathcal{S}_Y = \mathcal{P}_Y$ が minimum principle からわかる。郡［　］。

◎ $\Gamma(Y, \mathfrak{Q}) \ni M$としよう．各点$x \in Y$に対し$x$の近傍$U_x$と$s_x, t_x \in \mathcal{P}_{U_x}$をえらび$M|U_x = \rho_{U_x}(s_x - t_x)$となるようにする．open set V_xを$x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U_x$とえらぶ。点$x_1, x_2, \cdots, x_n$および$V_{x_i} = V_i$をとり$Y = \bigcup^n V_i$とできるが，$x_n = a$，$a \notin \overline{V_i}$，$1 \leq i \leq n-1$，と思ってよい。$Z_i = V_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j$，$1 \leq i \leq n$，とおこう。$\mathfrak{Q}$が$\mathcal{B}$-module だから$\Gamma(Y, \mathfrak{Q})$も$\mathcal{B}_Y$-module であり

$$M = 1_{\bigcup_{i=1}^n Z_i} \circ M = \sum_{i=1}^n 1_{Z_i} \circ M$$

となる．

$$(1_{Z_i} \cdot M)(x) = (r^x_{U_i} 1_{Z_i}) \circ (M(x)) = (r^x_{U_i} 1_{Z_i}) \circ (\rho^x_{U_i}(s_i - t_i))$$
$$= \rho^x_{U_i}(1_{Z_i} \circ s_i - 1_{Z_i} \circ t_i),$$

$p_i \equiv 1_{Z_i} \cdot s_i \in \mathcal{P}_{U_i}$，support of $p_i \subset \overline{Z_i} \subset U_i$となる。$Y$ small より Lemma 2.2 から$\exists u_i \in \mathcal{P}_Y \ni$ support of u_i = support of p_i，$u_i - p_i \in \mathcal{O}_{U_i}$とできる。したがって$\rho^{U_i}_Y u_i = p_i$。同様に$q_i \equiv 1_{Z_i} \circ t_i$と同じ support をもつ$v_i \in \mathcal{P}_Y$で$\rho^{U_i}_Y v_i = q_i$なるものが存在する。$x \in U_i$に対し

$$(1_{Z_i} \cdot M)(x) = \rho^x_{U_i}(p_i - q_i) = \rho^x_Y(u_i - v_i).$$

$u_i, v_i \in \mathcal{O}_{Y - \overline{Z_i}}$だから$x \in Y - U_i$に対しては

$$(1_{Z_i} \circ M)(x) = 0_x = \rho^x_Y(u_i - v_i).$$

$q = \sum_{i=1}^n (u_i - v_i)$とおこう。$q \in \mathfrak{Q}_Y$であり

$\rho_Y g = M$. $\mathcal{Q}_Y \to \Gamma(Y, \mathcal{Q})$ onto がまされた。
これは injective だったから $\mathcal{Q}_Y \to \Gamma(Y, \mathcal{Q})$ bijective.
⊙ $g \in \mathcal{Q}_Y$ に対し $r_Y j_Y g \in \Gamma(Y, \mathcal{R})$, $\pi r_Y j_Y g = \rho_Y g = M$ したがって $H^1(Y, \mathcal{O}) = \{0\}$。

Corollary 2.4 $1 \notin \mathcal{O}_Y$ ならば $\mathcal{O}_a \cong H^1_c(X, \mathcal{H})$,
$\mathcal{H}_X \cong H^1_a(Y, \mathcal{O})$ 。

§3 $H^1_c(X, \mathcal{H})$ と $\mathcal{H}_X^* = \mathcal{O}_X^*$ の duality

$\Gamma_c(X, \mathcal{Q}) \ni M$, $\mathrm{Supp}\, M = K$ とする。 X は small であるから定理2.3の証明における と同様に、K を有限個の開集合でおおい各々において M が $g \in \mathcal{Q}_{v_i}$ の canonical な像であるようにし この g を $\mathcal{Q}_X$ に拡張できる. すなわち $\exists_1 p \in \mathcal{Q}_X$, Supp p compact in X, such that $M = \rho_X p$。
この p は X の compact set に support をもつ measure μ により $\int p_y \, \mu(dy)$ と表わされる。 X 内の compact set を台とする measure に次のような同値関係を考えよう. 但 $p_y = {}^X p_y$.

$$\mu \sim 0 \iff \int p_y(x)\mu_+(dy) = \int p_y(x)\mu_-(dy) , \ x \in X \setminus {}^\exists K,$$
$$K \text{ compact in } X, \ \mu = \mu_+ - \mu_-$$

これは次の条件とも同値である; (5頁 σ_y^ω の def. を見よ).

$$\iff \int \sigma_y^\omega(A)\mu_+(dy) = \int \sigma_y^\omega(A)\mu_-(dy) , \ {}^\forall A : \text{Borel set} \subset X ,$$

が成り立つ開集合 $\omega \subset \overline{\omega} \subset X$ が存在する。

さて $g \in \Gamma_c(X, \mathcal{R})$, $\pi g = M \in \Gamma_c(X, \mathcal{Q})$ としよう。
$M = \rho_X p$, $p = \int p_y \, \mu(dy)$ とする。X上の函数 $g - p$ を考えると $\pi(g-p) = \pi g - \pi r_X \mathfrak{z}_X p = \pi g - \rho_X p = \pi g - M = 0$ だから $g - p \in \mathcal{O}_X$. 一方 $g - p$ は g の support が compact だから $\int p_y \, |\mu|(dy)$ により上.下からおさえられ, これは potential on X だから $g - p = 0$, したがって $p = 0$ out of some compact, すなわち $\mu \sim 0$ となる。

したがって $\mu \sim 0 \iff M = \pi g$, $\exists g \in \Gamma_c(X, \mathcal{R})$。

以上より次のことがわかった。

$$\mathcal{a}^* = \left\{ \mu : \begin{array}{l} \text{measure on } X \text{ with compact support} \\ \int p_y \, \mu_\pm(dy) \ \text{continuous} \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

とおくと

$$\mathcal{a}^* \cong H^1_c(X, \mathcal{H}) \quad \text{linear isomorph.}$$

これらの空間に位相を入れるため minimal sheaf $\overline{\mathcal{O}}$ を導入しよう. V nbd of a, $x \in V \cap X$, $f \in C(\partial V)$ に対し

$$\overline{H}^V f(x) = \inf \left\{ s(x) ; \begin{array}{l} s \text{ は } V \cap X \text{ 上の superharm. 函数} \\ \liminf\limits_{X \cap V \ni y \to \xi} s(y) \geqq f(\xi) \quad \xi \in \partial V \\ \liminf\limits_{X \cap V \ni y \to a} s(y) \geqq 0 \end{array} \right\}$$

とおく。$\overline{H}^V f$ は $X\cap V$ 上で harmonic であり，$\forall f\in C(\partial V)$ に対し $\overline{H}^V f = -\overline{H}^V(-f)$。　K を外から regular な compact set in X とし $V=Y\setminus K$ とすれば ∂V 上の連続函数 f に対し，$\lim\limits_{X\cap V\ni y\to\xi} \overline{H}^V f(y) = f(\xi)$，$\xi\in\partial V$，が成り立っている。（Loeb [ ]，郡 [ ]）。そして Loeb によりこのような $V=X\setminus K$ は a の基本近傍系をつくることがわかっている。そこで V，n.b.d of a に対し

$$\overline{\mathcal{O}}_V = \{ h\in\mathcal{H}_{V\cap X} \ ; \ \exists K \text{ outer regular}, \ \overline{Y-K}\subset V, \quad h=\overline{H}^{Y-K}[h\,|\,\partial K] \text{ on } X\setminus K \}$$

とおこう。$\overline{\mathcal{O}}_a = \varinjlim\limits_{V\ni a}\overline{\mathcal{O}}_V$ により Y 上の sheaf $\overline{\mathcal{O}}$ で $x\in X$ に対し $\mathcal{O}_x=\mathcal{H}_x$ なるものが得られ仮定 1 がみたされる．仮定 2．3．4 もみたされることがわかる．　また $1\notin\overline{\mathcal{O}}_Y$ も定義よりわかる。　したがって系 2.4 より $\overline{\mathcal{O}}_Y=\{0\}$，　$\overline{\mathcal{O}}_a\cong H^1_c(X,\mathcal{H})$。

上の $\overline{\mathcal{O}}_V$ は $V\cap X$ 上の compact 一様収束の位相により $\mathcal{H}_{V\cap X}$ の閉部分空間　したがって nuclear space である。$\overline{\mathcal{O}}_a$ に帰納極限の位相を与えると $\overline{\mathcal{O}}_a$ も nuclear. linear isomorphism $\overline{\mathcal{O}}_a\simeq H^1_c(X,\mathcal{H})$ により $H^1_c(X,\mathcal{H})$ の位相を与えよう。あるいは次のように考えるとわかりやすい。

$\overline{\mathcal{O}}_a\ni u$ とすると，ある $V\ni a$ 上で $\overline{\mathcal{O}}_V\ni u$。Lemma 2.1 より $u=p-q$ on $V'\subset V$ となる $p,q\in\overline{\mathcal{P}}_Y$ が

えらべて，さらに $p, q \in \overline{\mathcal{O}}_{V'}$ とできる。ただし $\overline{\mathcal{P}}_Y$ は $\overline{\mathcal{O}}$ からつくった Y 上の conti. potential で，ここにおいて Y は small になることを使った。$\overline{\mathcal{P}}_Y \cap \overline{\mathcal{O}}_{V'} \ni {}^\forall s$ は $\mathcal{P}_X$ に属すことがたしかめられるから，V' 上で

$$u = p - q = \int p_y \, \mu(dy)$$

と $\mathrm{Supp}\, \mu \subset X \setminus V'$ なる measure μ により表わされる。$\overline{\mathcal{O}}_a$ の元 u に，この μ を対応させることにすれば，$\overline{\mathcal{O}}_a$ の 0 元とは a の十分小さな近傍で 0 なる函数であるから，それに対し $\mu \sim 0$。すなわち $\overline{\mathcal{O}}_a \longrightarrow \mathcal{A}^*$ なる linear map が得られ容易にわかるようにこれは 1 対 1，onto。この linear isomoh. により $\mathcal{A}^*$ に位相を与える。

さて $\mathcal{A}^* \simeq H^1_c(X, \mathcal{H}) \simeq \overline{\mathcal{O}}_a$ と $\mathcal{H}^*_X$ に対し次の双一次形式を定義しよう。$\mathcal{A}^* \ni \varphi$，$\mathcal{H}^*_X \ni h^*$ に対し

$$b(h^*, \varphi) = \int h^*(x)\, d\mu(x), \quad \mu \in \varphi.$$

これは $h^* \in \mathcal{H}^*_X$ なら $\int h^*(y)\, d\sigma^\omega_x(y) = h^*(x)$，$\forall x \in \forall \omega \subset \overline{\omega} \subset X$ なることと，$\mu \sim 0 \Leftrightarrow \mu\sigma^\omega = 0$，$\exists \omega$，より φ の代表元 μ のとり方に依存しない。

定理 3.1. $\mathcal{A}^*$ に上述の位相を与えて考えると，

$$(\mathcal{A}^*)' \simeq \mathcal{H}^*_X.$$

この対応は $\langle \Phi, \varphi \rangle = b(h^*, \varphi)$，$\forall \varphi \in \mathcal{A}^*$，により与えられる。

系3.2. measure $\sigma_y^\omega(dz)$ の同値類を $k(y)\in\mathcal{A}^*$ と記す。($\int p_z(x)\sigma_y^\omega(dz)=p_y(x)$ out of $\overline{\omega}$ より ω に依らない). すると $\forall h^*\in\mathcal{H}_X^*$ に対し一意的に $\Phi\in(\mathcal{A}^*)'$ が存在し

$$h^*(y) = \langle \Phi, k(y)\rangle, \quad y\in X$$

と表現される。(Poisson 表現).

定理の証明は次の Lemma により為される。 $\mathcal{A}^*\ni\varphi$ に対応する $\overline{\mathcal{O}}_a$ の元は $\int p_y(\cdot)\mu(dy)$, $\mu\in\varphi$, の a における germ であることに再度注意しておこう。とくに $k(y)\in\mathcal{A}^*$ は $p_y(\cdot)$ の a における germ と対応している。

Lemma 3.3. (1) $X\ni y\longrightarrow k(y)\in\mathcal{A}^*$ は連続

(2) ω を c.d set, $y\in\omega$ とする。$\partial\omega$ の分割 $\pi=(\delta_j)_{1\le j\le n}$, $\bigcup_{j=1}^n\delta_j=\partial\omega$ と各 δ_j から一点 y_j をえらんだものを考える。このとき分割 π を細かくすると

$$\sum_\pi k(y_j)\int_{\delta_j}\sigma_y^\omega(dz) \xrightarrow[\pi\downarrow 0]{} k(y) \quad \text{in } \mathcal{A}^* .$$

証明. (1) $y_n\to y_0\in X$ に対し $\{y_n, y_0\}\subset K\subset X$ なるコンパクト集合をとる。$p_{y_n}(\cdot)\to p_{y_0}(\cdot)$ uniformly on $\forall$ compact subset of $X\setminus K$ だから、その $\overline{\mathcal{O}}_a$ への germ も $\overline{\mathcal{O}}_a$ で収束する。ゆえに $k(y_n)\to k(y_0)$ in $\mathcal{A}^*$。

(2) $\overline{\omega}\subset K$ なる compact set $\subset X$ をとる。

$$\sum p_{y_j}(x)\,\sigma_y^\omega(\delta_j) \longrightarrow \int p_z(x)\sigma_y^\omega(dz) = p_y(x),\quad x\in X\setminus K.$$

だが両辺とも $\overline{\mathcal{O}}_{Y\setminus K}$ に属すから $X\setminus K$ の ${}^\forall$compact subset 上で一様収束する．したがって両辺の $\overline{\mathcal{O}}_a$ への像も収束。すなわち

$\sum k(y_j)\,\sigma_y^\omega(\delta_j) \longrightarrow k(y)$ in $\mathcal{a}^*$。

（定理の証明） $\Phi \in (\mathcal{a}^*)'$ をとる。Lemma (1) より $y \to \langle \Phi, k(y)\rangle \equiv u(y)$ は X 上の連続函数であり，Lemma (2) より $\sum_\pi \langle \Phi, k(y_j)\rangle \sigma_y^\omega(\delta_j) \longrightarrow \langle \Phi, k(y)\rangle$，$y\in\omega$, c.d set となる．ゆえに $\int u(z)\,\sigma_y^\omega(dz) = u(y)$，$u \in \mathcal{H}_X^*$。

上の Lemma の (2) と同様に $\forall\mu \in \Gamma_c(X.\mathcal{Q})$ に対し，Riemann 和

$\sum_\pi P_{y_j}(\cdot)\,m(\Delta_j) \underset{\pi\downarrow 0}{\longrightarrow} \int P_y(\cdot)\,m(dy)$，compact uniformly out of some compact set in X。但し (Δ_j) は Supp m の分割で $y_j \in \Delta_j$．したがって $\int P_y(\cdot)\,m(dy)$ の $\mathcal{a}^*$ への像を φ とすると $\sum_\pi k(y_j)\,m(\Delta_j) \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{a}^*$。ゆえに

$\langle \Phi, \varphi\rangle = \lim \sum_\pi m(\Delta_j)\langle \Phi, k(y_j)\rangle = \int u(y)\,m(dy)$

$= b(u, \varphi)$。

逆に $u \in \mathcal{H}_X^*$ に対し $(\mathcal{a}^*)'$ の元が定まることを示そう。

Lemma 3.3 (3) V を a の open n.b.d，A compact $\subset X$ とする．このとき $\{ y \to P_y(x)|_{y\in \mathring{A}\cap V}$; $x \in X\cap V\setminus A\}$ は $\mathcal{H}^*_{\mathring{A}\cap V}$ の部分集合だが，これの張る closed linear subspace in $\mathcal{H}^*_{\mathring{A}\cap V}$ は $\mathcal{H}_X^*|_{\mathring{A}\cap V}$ を含む。

証．$U = \mathring{A}\cap V$ 上の support compact な measure ν に対し

$\int P_y(x)\,\nu(dy) = 0$，$\forall x \in X\cap V\setminus A \Rightarrow \int h^*(y)\,\nu(dy) = 0$，$\forall h^*$

$\in \mathcal{H}_X^*$, を言えばよい。 ところが $\int p_y(x)\,\nu(dy) = 0,\ \forall x \in X \cap V \setminus A$ ならば $\nu \sim 0$ だから $\int h^* d\nu = b(\varphi, h^*) = 0$, $\forall h^* \in \mathcal{H}_X^*$ がしたがう。但し φ は ν の同値類.

（定理の証明の続き） $u^* \in \mathcal{H}_X^*$ をとる。 a の近傍 V と X の compact set A を $\overline{Y \setminus A} \subset V$ ととり $U = \mathring{A} \cap V$ とする。Lemma より $\exists \alpha_{jk}$, $\exists x_{jk} \in X \cap V \setminus A$ such that

$$\sum_{j=1}^{n_k} \alpha_{jk}\, p_y(x_{jk}) \xrightarrow[k\to\infty]{} u^*(y),\quad y \in U \text{ について}$$

U の compact 一様収束，とできる。 $\overline{\mathcal{O}}_V \ni h$, $Y \setminus A \subset V' \subset V$ としよう。 $h = \int p_y\, m(dy)$ on V' が成り立つような $\mathrm{Supp}\, m \subset V \setminus V' \subset U$ なる measure m がとれる。(Lemma 2.1)。 したがって

$$\sum_{j=1}^{n_k} \alpha_{jk}\, h(x_{jk}) \xrightarrow[k\to\infty]{} \int u^*(y)\, m(dy) = b(u^*, \varphi)$$

但し $\varphi \in \mathcal{A}^*$ は $h \in \overline{\mathcal{O}}_V$ により induce される元。 したがって $\varphi \to b(u^*, \varphi)$ なる $\mathcal{A}^*$ 上の1次形式が $\overline{\mathcal{O}}_V$ 上に induce する一次形式は $h \longrightarrow \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_{jk}\, h(x_{jk})$ なる一次形式の simple limit になっており，またこれらは $\overline{\mathcal{O}}_V$ 上で連続だからその simple limit も Banach − Steinhaus の定理より連続になる。 V は任意だから $\varphi \longrightarrow b(u^*, \varphi) \in (\mathcal{A}^*)'$。

$0 \to \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_a \to H_c^1(X, \mathcal{H}) \cong \mathcal{A}^*$ なる exact 列が成り立つことを §2 で見たが，$\mathcal{O}_a \xrightarrow{\tau} \mathcal{A}^*$ なる写像を考えよう。

V, n.b.d of a, $\mathcal{O}_V \ni u$ とする. $\mathcal{R}$ は fine だから $\exists\, \varphi \in \Gamma(Y.\mathcal{R})$, $=1$ on some V', nbd of a, $\subset V$, $\mathrm{Supp}\,\varphi \subset V$ なるようにできる. $t = u\varphi$ on V, $=0$ on V^c とおくと $t \in \Gamma(Y.\mathcal{R})$。$\pi t \in \Gamma_c(X,\mathcal{Z})$ もわかる. この πt の同値類を τu と置く。πt は mod $\pi\Gamma_c(X.\mathcal{R})$ で well defined だから τu も well defined. そして $u \in \mathcal{O}_Y$ なら $\varphi = 1 \in \Gamma(Y.\mathcal{R})$ として $\pi u = 0$, 逆に $\tau u = 0$ なら $\exists f \in \Gamma_c(X.\mathcal{R})$, $\pi t = \pi f$ だから $h = t - f \in \mathcal{O}_Y$ したがって $(\mathrm{Supp}\,f)^c \supset V \ni a$ をとれば $\rho_Y h = u$ on V すなわち u の $\mathcal{O}_a$ への canonical な像は $\mathcal{O}_Y$ の image に入る。ゆえに $\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_a \xrightarrow{\tau} H^1_c(X.\mathcal{H})$ (exact).

§4 Cousin の問題, $H^1(Y,\mathcal{O})$ と $\mathcal{O}_Y^*$ の duality.

次の exact 系が成り立つ:

V_1 を a の nbd, $\overbrace{V_2 \subset X,\ V_1 \cap V_2 \neq \phi \text{ に対し}}$ $(V_1 \subset V_0)$

$$0 \to \mathcal{O}_Y \xrightarrow{i} \mathcal{O}_{V_1} \times \mathcal{O}_{V_2} \xrightarrow{j} \mathcal{O}_{V_1 \cap V_2} \xrightarrow{k} H^1(Y,\mathcal{O}),$$

ただし i は $\mathcal{O}_Y \ni u \longrightarrow (r^{V_1}_Y u,\ r^{V_2}_Y u) \in \mathcal{O}_{V_1} \times \mathcal{O}_{V_2}$,

j は $\mathcal{O}_{V_1} \times \mathcal{O}_{V_2} \ni (s,h) \longrightarrow s - h \in \mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}$

k は $\mathcal{O}_{V_1 \cap V_2} \ni s$ に対し $f_1 \in \mathcal{R}_{V_1}$, $f_2 \in \mathcal{R}_{V_2}$ をとり $s = f_1 - f_2$ on $V_1 \cap V_2$ となるようにする. これは $\mathcal{R}_{X_1}$, $\mathcal{R}_{V_0}$ が 1 の分解をもつ Ring であるからできる. $M \in \Gamma(Y,\mathcal{Z})$

を $M = \pi f_1$ on V_1, $= \pi f_2$ on V_2 と定義する。$0 = \pi s = \pi f_1 - \pi f_2$ on $V_1 \cap V_2$ より well defed. $s \to M$ は f_1, f_2 に依存せず coboundary $\pi \Gamma(Y, \mathcal{H})$ をのぞいて定義される。

さて $H^1(Y, \mathcal{O})$ は $H^1(\mathcal{U}(V_1, V_2), \mathcal{O}) \simeq \dfrac{\mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}}{\mathcal{O}_{V_1} \times \mathcal{O}_{V_2}}$ の帰納的極限として定義されたから V_1, V_2 が条件をみたしつつ動けばその k による像が $H^1(Y, \mathcal{O})$ をつくしている。そこで $H^1(Y, \mathcal{O})$ に $\mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}$ の位相の (V_1, V_2) をうごかした帰納的極限の位相を与えよう.（$\mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}$ の位相はもちろん $V_1 \cap V_2$ 上のコンパクト一様収束の位相）。X 内に support をもつ $\mathcal{O}_{V_1}$ の元は 0 しかないから $H^1_X(\mathcal{U}(V_1, V_2), \mathcal{O}) \simeq \dfrac{\mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}}{\mathcal{O}_{V_2}}$ で $H^1_c(X, \mathcal{H}) = H^1_X(Y, \mathcal{O})$ はこの帰納的極限になっているがわれわれがすでに $H^1_c(X, \mathcal{H})$ に定義した位相, すなわちあるコンパクト集合 A の外側 $X \setminus A$ におけるコンパクト一様収束の位相, はこの $\mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}$ の帰納的極限の位相と同じだから, $H^1(Y, \mathcal{O})$ は $H^1_c(X, \mathcal{H})$ の位相を $H^1_c(X, \mathcal{H}) \to H^1(Y, \mathcal{O})$ により写像した位相をもつことになる。$\dfrac{\mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}}{\mathcal{O}_{V_1} \times \mathcal{O}_{V_2}}$ の帰納的極限は可算個の族によるとしてよいから $H^1(Y, \mathcal{O})$ も nuclear。

定理4.1. $H^1(Y, \mathcal{O})' \cong \mathcal{O}^*_Y$

証明 $F \in H^1(Y, \mathcal{O})'$ とする. V_1, V_2 を上のような対とすれば $F \circ k$ は $\mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}$ 上の conti. linear form だから $(F \circ k)(s) = \int s(x)\, d\mu(x)$, $s \in \mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}$, と $V_1 \cap V_2$ 上の測度

μ, $\mathrm{Supp}\,\mu \subset V_1 \cap V_2$, で書ける。とくに $V_2 = X$ ととる。$\forall G$ open $\subset X$ に対し $V_1 = V_0 \setminus \overline{G}$ ととろう。$p_y(x) = {}^X p_y(x)$ を X 上の kernel とすれば $(x \to p_y(x))_{y \in \overline{G}} \in \mathcal{O}_{V_1 \cap V_2} = \mathcal{O}_{X \setminus \overline{G}}$。したがって $(F \circ k)[\,p_y \mid X - \overline{G}\,] = \int p_y(x)\mu(dx)$, $\mathrm{Supp}\,\mu \subset X \setminus \overline{G}$, と書ける。この右辺は $y \in G$ の函数として, $\in \mathcal{O}^*_G$ である。また k の定義の方法より左辺は G に依らないことがわかるので, $y \in G$ に対し $h^*(y) = (F \circ k)[\,p_y \mid X - \overline{G}\,]$ により X 全体で定義された $*$-harmonic 函数を得る。ところで $g_y(x) = {}^{V_0} p_y(x)$ を V_0 上の kernel とし $V_1 = V_0$ とおく。V_0 内の閉集合 $A \ni a$ をとり $V_2 = X \setminus A$ ととろう。$(F \cdot k)[\,g_y \mid V_0 \cap X \setminus A\,] = \int g_y(x)\mu(dx)$, $\mathrm{Supp}\,\mu \subset V_1 \cap V_2$, とかけこれが y の函数として $\mathring{A}$ で $\mathcal{O}^*_{\mathring{A}}$ に属すことがわかる。

また $V_0 \cap X$ 上で $\rho_X p_y = \rho_{V_0} g_y$ だから $y \in G \cap \mathring{A}$ に対し $s = p_y \mid X - \overline{G}$ および $s' = g_y \mid V_0 \setminus A$ の $H^1(Y, \mathcal{O})$ における像は等しい。したがって $h^*(y) = (F \circ k)[\,g_y \mid V_0 \setminus A\,]$, $y \in G \cap \mathring{A}$, となり $h^* \in \mathcal{O}^*_Y$ と思える。逆に $h^* \in \mathcal{O}^*_Y$ が $F \in H^1(Y, \mathcal{O})'$ を define することは Lemma 3.3 (3) の拡張

Lemma 4.2:

- $\{y \to p_y(x)|_{y \in V_1 \cap V_2}\ ;\ x \in V_1 \setminus V_2\}$ の張る c.l.s in $\mathcal{O}^*_{V_1 \cap V_2}$ は $\mathcal{O}^*_X|_{V_1 \cap V_2}$ を含む
- $\{y \to g_y(x)|_{y \in V_1 \cap V_2}\ ;\ x \in V_2 - V_1\}$ の張る c.l.s in $\mathcal{O}^*_{V_1 \cap V_2}$ は

$\mathcal{O}^*_{V_0}|_{V_1\cap V_2}$ を含む。

により定理 3.2 と同様になされる。

系 4.3　$\mathcal{O}_Y \not\ni 1 \Rightarrow \mathcal{O}_Y = H^1(Y, \mathcal{O}) = \mathcal{O}^*_Y = \{0\}$

$H^1(Y, \mathcal{O}^*) = 0$

系 4.4.　$\mathcal{O}_Y \not\ni 1$ なら $\forall s \in \mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}$ は $s = p - h$, $p \in \mathcal{O}_{V_1}$, $h \in \mathcal{O}_{V_2}$ と書ける。(Cousin problem の解).

系 4.5　$\exists$ global kernel on Y. すなわち $\exists n_y(x)$; ◎ $x \longrightarrow n_y(x) \in \mathcal{O}_{Y-\{y\}}$, ◎ $(x, y) \rightarrow n_y(x)$ l.s.c on $X \times X$, conti at $x \neq y$.

(証)　$p_y(\cdot)|_{X-\{y\}} \in \mathcal{O}_{X-\{y\}}$ は系 4.4 より $= u_y(\cdot) - h_y(\cdot)$, $u_y \in \mathcal{O}_{Y-\{y\}}$, $h_y \in \mathcal{O}_X$ と書ける。そこで $n_y(x) = u_y(x)$ for $x \in Y - \{y\}$, $= p_y(x) + h_y(x)$ for $x \in X$ とおけばよい。

さて上の $H^1(Y, \mathcal{O})$ と $\mathcal{O}^*_Y$ の duality を $\mathfrak{A}^* \longleftrightarrow \mathcal{O}^*_X = \mathcal{H}^*_X$ の duality から見よう。そして $1 \in \mathcal{O}_Y$ の場合をしらべる。

§3 の最後で $\mathcal{O}_a \xrightarrow{\tau} H^1_c(X, \mathcal{H})$ なる写像をしらべたが、それは $\mathcal{O}_V \ni u \longrightarrow t \in \Gamma_c(V_0, \mathcal{R}) \longrightarrow \pi t \in \Gamma_c(V_0, \mathcal{Q})$ によりつくられた。$\pi t \in \Gamma_c(V_0, \mathcal{Q})$ は $\mathcal{Q}_{V_0}$ の元, したがって $\int g_y \, \mu(dy)$ が conti になる measure μ により一意的に $\pi t = \rho_{V_0}(\int g_y \, \mu(dy))$ あらわされる。但し $g_y = {}^{V_0}p_y$ は V_0

上の kernel. $g = r_{V_0} j_{V_0}(\int \delta_y \mu(dy)) = \int \delta_y \mu(dy) \in \Gamma(V_0 . \mathcal{R})$ とおくと $\pi(g-t) = \rho_{V_0}(\int \delta_y \mu(dy)) - \pi t = 0$, $g - t \in \mathcal{O}_{V_0}$ だが $t \in \Gamma_c(V_0 . \mathcal{R})$ すなわち $\exists A \ni a$, compact in V_0, $t = 0$ on $V_0 \setminus A$ であり $g \in \mathcal{O}_{V_0}$ だから $g = t$ on V_0 でなくてはならない。$g = 0$ on $V_0 \setminus A$, ${}^{V_0}R^{V_0 \setminus A}(\int \delta_y \mu_+(dy)) = {}^{V_0}R^{V_0 - A}(\int \delta_y \mu_-(dy))$, となり結局 $\mu_+ \sigma^V = \mu_- \sigma^V$, が $a \in {}^{\forall}V_{open} \subset A$ に対し成り立つ。すなわち τu は $\mu \sigma^V = 0$, $a \in {}^{\exists}V \subset \bar{V} \subset V_0$, をみたす measure により $\rho_{V_0}(\int \delta_y \mu(dy)) \in \Gamma_c(X_0, \mathcal{Z})$ を $X \setminus V_0$ で 0 とおいて $\Gamma_c(X . \mathcal{Z})$ の元としたものの同値類である. ($\rho_{V_0}(\int \delta_y \mu(dy)) = \rho_X(\int \delta_y \mu(dy))$ on $V_0 \cap X$ に注意). 逆に $\varphi \in \mathcal{Q}^*$ をとり, $\varphi \ni \mu$ 代表元が $\mu \sigma^V = 0$, $a \in V \subset \bar{V} \subset V_0$, をみたせば, $\int \delta_y \mu(dy) \in \mathcal{O}_{V_0 - S[\mu]}$; $= u$ とおいて $u = 0$ on $V_0 - \bar{V}$, がわかる。$t = r_{V_0} u$ on V_0, $= 0$ on $X \setminus V_0$ とすると $\pi t \in \Gamma_c(X . \mathcal{Z})$ であり $\pi_{V_0} t = \rho_{V_0}(\int \delta_y \mu(dy))$ だから $\tau u = \varphi$ すなわち $\varphi \in \tau \mathcal{O}_a$ がわかる. 以上より $\mathcal{N}^* = \{\varphi \in \mathcal{Q}^*, \varphi \ni \mu$ は $\mu \sigma^V = 0$, $a \in {}^{\exists}V \subset V_0$ をみたす$\}$ とおけば $\mathcal{N}^* \simeq \tau \mathcal{O}_a \simeq \mathcal{O}_a / \mathcal{O}_Y$ となる。

$(\mathcal{N}^*)^\circ = \{h^* \in \mathcal{H}^*_X ; b(\varphi, h^*) = 0. \ \forall \varphi \in \mathcal{N}^*\}$ とおき $(\mathcal{N}^*)^\circ = \mathcal{O}^*_Y$ を示そう。$\mathcal{O}^*_Y \subseteq (\mathcal{N}^*)^\circ$ はあきらか。さて $y \in V_0 \cap X$, V を c.d. set, $\{a, y\} \subset V \subset \bar{V} \subset V_0$ ととる。また $\omega \subset X$, c.d. set を十分大きくとり,

$y \in \omega$, $\partial\omega \subset V$, となるようにする. $\nu(dz) = \sigma_y^\omega(dz) - \int \sigma_x^V(dz)\sigma_y^\omega(dx)$ とおく。$\nu \in \varphi \in \mathcal{A}^*$ としよう. $\varphi \in \mathcal{N}^*$ である. なぜなら $\overline{V} \subset V' \subset \overline{V'} \subset V_0$ なる open set に対し $\int f(z)\,\nu\sigma^{V'}(dz) = \int \sigma_y^\omega(dx)\{\int \sigma_x^{V'}(dz)f(z) - \int \sigma_x^V(du)\int \sigma_u^{V'}(dz)f(z)\} = \int \sigma_y^\omega(dx)\{\int \sigma_x^{V'}(dz)f(z) - \int \sigma_x^{V'}(dz)f(z)\} = 0$, $\forall f \in C(\partial V')$ だから $\nu\sigma^{V'} = 0$, ゆえに $\varphi \in \mathcal{N}^*$. さて $h^* \in \mathcal{H}_X^*$, $b(h^*, \varphi) = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{N}^*$ とすれば $\int h^*\,d\nu = 0$ したがって $h^*(y) - \int \sigma_y^V(dz)h^*(z) = \int h^*\,d\nu = 0$, $h^* \in \mathcal{O}_V^*$. ゆえに $h^* \in \mathcal{O}_Y^*$。

$\mathcal{N}^*$ は closed convex in $\mathcal{A}^*$ だから bipolar theorem より $\mathcal{N}^* = (\mathcal{N}^*)^{\circ\circ} = (\mathcal{O}_Y^*)^\circ$

また $0 \to \mathcal{N}^* \to \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*/\mathcal{N}^* \underset{(exact)}{\to} 0$ および $\mathcal{N}^* \simeq \mathcal{O}_a \simeq \mathcal{O}_a/\mathcal{O}_Y$, $\mathcal{A}^* \simeq H_c^1(X, \mathcal{H})$ から $\mathcal{A}^*/\mathcal{N}^* \simeq H^1(Y, \mathcal{O})$ である. 一方 duality の一般論より $(\mathcal{A}^*/\mathcal{N}^*)' \simeq (\mathcal{N}^*)^\circ$ が知られているから ふたたび $(H^1(Y, \mathcal{O}))' \simeq \mathcal{O}_Y^*$ が得られた.

$1 \notin \mathcal{O}_Y$ なら $\mathcal{O}_Y = \{0\}$, $\mathcal{P}_Y = \mathcal{S}_Y$ を先に見たが, $1 \in \mathcal{O}_Y$ なら $\mathcal{P}_Y = \{0\}$, $\mathcal{S}_Y = \mathcal{O}_Y = R^1$ となることを見よう。$\mathcal{P}_Y \ni \exists u > 0$ と仮定しよう. $\forall x_0 \in X$ をとると $\lambda u(x_0) > 1$ なる $\lambda > 0$ をとれる. $\lambda u - 1 \in \mathcal{S}_Y$ ($\because 1 \in \mathcal{O}_Y$) だから Minimum principle より $\lambda u - 1 \geqq 0$, $\lambda u \geqq 1$, したがっ

て $1 \in \mathcal{P}_Y$ となるが これは $1 \in \mathcal{P}_Y \cap \mathcal{O}_Y = \{0\}$ とむじゅん。
したがって $\mathcal{S}_Y = \mathcal{O}_Y$ でこの元は互に比例することがわかる。
このことは $\mathcal{O}_Y^*$ についても同様である。

定理 $1 \in \mathcal{O}_Y \Rightarrow \dim \mathcal{O}_Y = \dim H^1(Y, \mathcal{O}) = 1$

$$\dim \mathcal{O}_Y^* = 1$$

証. $\mathcal{O}_Y^* = \{0\}$ 又は $\dim \mathcal{O}_Y^* = 1$ だが、$\mathcal{O}_Y^* = \{0\}$ と仮定しよう。すると $\mathcal{N}^* = (\mathcal{O}_Y^*)^\circ = \mathcal{A}^*$, したがって $\mathcal{A}^*/\mathcal{N}^* \cong H^1(Y, \mathcal{O}) = \{0\}$, これより $1 \notin \mathcal{O}_Y$ がしたがう。実際 $1 \in \mathcal{O}_Y$ としてみよう。$p \in \mathcal{P}_X$, > 0 で $\mathrm{Supp}\, p = K$, コンパクト $\subset X$ なるものをとる。系4.4より $h \in \mathcal{H}_X$, $u \in \mathcal{O}_{Y \setminus K}$ を $p = u - h$ on $X \setminus K$ となるようにとれるから $s = p - h$ on X, $= u$ on $Y \setminus K$ とおくと s は well defed で $s \in \mathcal{S}_Y$, $\notin \mathcal{H}_X$. α 定数を適当にとり $\inf_{\partial K}(s - \alpha \cdot 1) = 0$ とする。$s - \alpha \cdot 1 \in \mathcal{S}_Y$. Minimum principle より $s - \alpha \cdot 1 \geq 0$ on $X \setminus K$, および $s - \alpha \cdot 1 \geq 0$ on $\mathring{K}$. したがって $s - \alpha \cdot 1 \geq 0$, $\in \mathcal{S}_Y$, $= 0$ at some point of ∂K. ゆえに $s - \alpha \cdot 1 = 0$, $s \in \mathcal{O}_Y \subset \mathcal{H}_X$ むじゅん。以上より $1 \in \mathcal{O}_Y$ なら $\mathcal{O}_Y^*$ は positive な元を含む、このとき $\dim \mathcal{O}_Y^* = 1$. したがって $\mathcal{N}^* = \{\varphi \in \mathcal{A}^*, b(h^*, \varphi) = 0, \forall h^* \in \mathcal{O}_Y^*\}$ は codimension 1, i.e. $\dim \mathcal{A}^*/\mathcal{N}^* = 1$, $\dim H^1(Y, \mathcal{O}) = 1$。

§5 Quasi analytic property

$\mathfrak{a}^* \simeq H_c^1(X, \mathcal{H})$ が Hausdorff になる条件を見る。

（性質 A） X の領域 G に対し "$h \in \mathcal{H}_G$, $h = 0$ on a open set $\subset G \Rightarrow h = 0$" が成り立つ。

定理（Malgrange, de la Pradelle）

$G \subset X$, open. （A）の下で "$\forall u \in \mathcal{H}_G^*$ は $\mathcal{H}_X^*$ の元により G 上 compact 一様に近似される" ための必要十分条件は $X \setminus G$ が相対コンパクトな connected comp. をもたないこと。

定理

$$(A) \Longrightarrow H^1(X, \mathcal{H}^*) = 0$$

定理

$$(A) \Rightarrow \mathfrak{a}^* \text{ は Hausdorff}$$

証 $b(h^*, \varphi) = 0$, $\forall h^* \in \mathcal{H}_X^* \Rightarrow \varphi = 0$ を言う。

$\varphi \ni \mu$, $\int h^* d\mu = 0$, $\forall h^* \in \mathcal{H}_X^*$ であるが, $\mathrm{Supp}\,\mu \subset (X \setminus K)$ なる　　, K compact $\subset X$ をとろう。

$G = \mathring{K}$ とおく。G は rel. compact な成分をもたないとしてよい。$x \in X \setminus K$ に対し $y \to P_y(x)|_G \in \mathcal{H}_G^*$ だが de la Pradelle の定理から $\int P_y(x)\, d\mu(y) = 0$. すなわち compact set K の外で $\int P_y\, \mu(dy) = 0$, $\therefore \mu \sim 0$, $\varphi = 0$.

定理 仮定（A）$\Rightarrow (\mathcal{H}_X^*)' \simeq \mathfrak{a}^*$

証. $\varphi \in \mathfrak{a}^*$ に対し $h^* \to b(h^*, \varphi)$ が $\mathcal{H}_X^*$ 上の

conti. lin. form になることはあきらか。 逆に $(\mathcal{H}_X^*)' \ni \Phi$ をとる。C(X) に Hahn-Banach の定理を適用して ∃λ, measure Supp λ, compact ⊂ X ∋ $\int h^* d\lambda = \Phi(h^*)$, $\forall h^* \in \mathcal{H}_X^*$.

$\int P_y(\cdot)\lambda(dy) \in \overline{\mathcal{O}}_{Y-S[\mu]}$ の a における germ u に対して $\tau u \in \mathcal{A}^*$ を定める。 $\Phi(h^*) = b(h^*, \tau u)$ そして別の measure λ′ に対し $\int h^* d\lambda' = b(h^*, \tau u') = \Phi(h^*)$ となれば $b(h^*, \tau u - \tau u') = 0$, $\forall h^* \in \mathcal{H}_X^*$, ゆえに $\tau u = \tau u'$。すなわち Φ に対し唯一つ $\varphi \in \mathcal{A}^*$ が定まる。

系 仮定 (A) ⇒

$$0 \to \mathcal{O}_Y^* \to \mathcal{O}_X^* \to H_a^1(Y, \mathcal{O}^*) \to H^1(Y, \mathcal{O}^*) \to 0 \quad \text{exact}$$

(∵) $H^1(X, \mathcal{O}^*) = 0$.

系 仮定 (A); ⇒ $1 \notin \mathcal{O}_Y$ ならば $\mathcal{O}^*$ に対する Cousin problem が解ける。 さらに $1 \in \mathcal{O}_Y$ であっても、$s \in \mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}^*$ に対し (P.19 と同様に定義した k^*: $\mathcal{O}_{V_1 \cap V_2}^* \to H^1(Y, \mathcal{O}^*)$ に対し) $k^* s = 0$ なら $s = p - h$, $p \in \mathcal{O}_{V_1}^*$, $h \in \mathcal{O}_{V_2}^*$ と書ける。

§6 Martin boundary 上への conti. extension

$\mathcal{A}^*$ が主な役を果したが、これの直観的な意味は potential の Martin 境界での法線微分により表わされる函数の芽で

ある。 $Q^* \equiv \frac{1}{P_{x_0}} \overline{O}_a \equiv \{ \frac{1}{P_{x_0}(\cdot)} h(\cdot) ; \ h \in O_V, V \ni a \}$ (但し $x_0 \in X$ fix). による X の compact 化を $X^* = X \cup \Delta^*$ と書く。 $\frac{1}{P_{x_0}(\cdot)} P_y(\cdot)$ の conti ext over $X^* \setminus \{y\}$ を $k^*_\cdot(y)$ と書く。 Δ^* を双対マルチン境界、 $k^*_\xi(y)$ を双対マルチン核という。 $k^*_\cdot(y)$ の Δ^* における germ が系3.2 の $k(y)$ になっている。系3.2 は $h^*(y) = \langle \Phi, k^*_\cdot(y) \rangle$ と書いた方が Poisson 表現らしく見える. すなわち $(Q^*)' \ni \Phi$ を Δ^* 上の函数空間の dual の元と見て, $\mathcal{H}^*_X$ の元の distribution による表示と見られるからである. しかしこれは formal にのみ正しい。 $C(\Delta^*) \supset A^*$ を適当にとり $A^* \ni \overline{\varphi}$ は必ず $Q^* \ni \varphi$ の延長されるようにできれば、上述のような解釈は真に正しい. これは2階楕円型の境界値問題が完全に解けることと大体同じでありとうていできない。

文献

1. B. Walsh. Ann. Inst Fourier XIX-2 (1970)
2. ——— Inventiones M. 8 (1969)
3. 国府 公理的ポテンシャル論, Sem. on Probability
4. ——— J. Math. Soc. Japan 23-3 (1971)
5. 前田. J. Sci. Hiroshima. Ser A-1-30 (1966)

その他 Schapira の本, Herve の著名な論文等